

Előadás követő fóliák a Matematika mérnököknek I. című tárgyhoz

Burai Pál

Numerikus módszerek alapjai

A tananyag elkészítését az EFOP-3.4.3-16-2016-00021 számú projekt támogatta. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

Az `intmax` utasítás, a legnagyobb ábrázolható pozitív egész meghatározása

```
intmax
```

```
ans =
```

```
int32
```

```
2147483647
```

```
2147483647+1
```

```
ans =
```

```
2.1475e+09
```

Nem nulla lebegőpontos számok alakja

$$\pm a^k \left(\frac{m_1}{a} + \frac{m_2}{a^2} + \dots + \frac{m_t}{a^t} \right), \quad \text{ahol } k \text{ a karakterisztika és}$$

(m_1, \dots, m_t) a mantissza.

Tárolása:

$$[\pm, k, m_1, \dots, m_t], \quad 1 \leq m_1 \leq a - 1, \quad 0 \leq m_i \leq a - 1, \quad i = 2, \dots, t$$

Ha $k_{(-)} \leq k \leq k_{(+)}$, akkor a legnagyobb ábrázolható szám

$$M_{\infty} = a^{k_{(+)}} \left(\frac{a-1}{a} + \frac{a-1}{a^2} + \dots + \frac{a-1}{a^t} \right) = a^{k_{(+)}} (1 - a^{-t}).$$

A legkisebb ábrázolható szám $-M_{\infty}$. A nullához legközelebbi lebegőpontos szám: $\varepsilon_0 = a^{k_{(-)}-1}$ Gépi epszilon: $\varepsilon_1 = a^{1-t}$, ahol az 1 után következő ábrázolható szám $1 + \varepsilon_1$.

A bemenő adat kerekítése

Legyen $|x| \leq M_\infty$ és a hozzárendelt lebegőpontos szám \tilde{x} , ekkor

$$\tilde{x} = \begin{cases} 0, & \text{ha } |x| < \varepsilon_0, \\ \text{az } x\text{-hez legközelebbi lebegőpontos szám,} & \text{ha } \varepsilon_0 \leq |x| \leq M_\infty. \end{cases}$$

Kerekítési hiba

$$|x - \tilde{x}| \leq \begin{cases} \varepsilon_0, & \text{ha } |x| < \varepsilon_0, \\ \frac{1}{2}\varepsilon_1|x|, & \text{ha } \varepsilon_0 \leq |x| \leq M_\infty. \end{cases}$$

Ha levágással kerekít a gép, azaz a nulla felé eső legközelebbi lebegőpontos szám lesz \tilde{x} , akkor $\frac{1}{2}\varepsilon_1$ helyett a hiba ε_1 .

Lebegőpontos számítás, kerekítés

Műveletek eredményének kerekítése:

Példa

Legyen $a = 10$, $t = 3$, $k_- = -3$, $k_+ = 3$. Ekkor $\varepsilon_1 = 0.01$. Adjuk össze $x = 3.45$ -ot $y = 0.567$ -del. A karakterisztikák ($k_1 = 1$, $k_2 = 0$) különbözőek, ezért $k_1 - k_2 = 1$ számjeggyel jobbra kell csúsztatni a mantisszát. Ekkor az összeadás menete a következő:

	+	1	345
+	+	0	567
=	+	1	345
+	+	1	0567
=	+	1	4017

Mivel $t = 3$, ezért nincs hely a végeredmény tárolására. Ha szabályosan kerekítünk, akkor az eredmény

+	1	402
---	---	-----

 lesz, ami hibás. A hibára érvényes a következő becslés:

$$|\text{pontos} - \text{numerikus}| = 0.003 = \varepsilon_1 * 0.3 = \frac{1}{2}\varepsilon_1 * 0.6 < \frac{1}{2}\varepsilon_1 * |\text{pontos}|$$

Lebegőpontos számítás, kerekítés

A fenti becslés általában is igaz szabályos kerekítés esetén. Hasonlóan belátható, hogy levágásnál az $\frac{1}{2}$ -es szorzót el kell hagyni. Általában, ha \diamond jelöli a $+$, $-$, $*$, $/$ négy alpművelet valamelyikét, ε_\diamond pedig a számolásnál keletkező **abszolút hibát**, akkor

$$|\varepsilon_\diamond| \leq \varepsilon_1 * \begin{cases} 1 & \text{levágás esetén} \\ \frac{1}{2} & \text{szabályos kerekítés esetén.} \end{cases}$$

Fontos megjegyzés

A fenti összefüggés **alulcsordulás** (az eredmény abszolút értékben kisebb, mint ε_0) és **túlcsordulás** (az eredmény abszolút értékben nagyobb, mint M_∞) esetén nem érvényes.

Az abszolút hiba mértéke a bemenő adat nagyságrendje nélkül félrevezető lehet, ezért e mellett használjuk a hiba mérésére a **relatív hibát** is:

$$\left| \frac{\text{pontos} - \text{numerikus}}{\text{pontos}} \right| = \left| \frac{\tilde{z} - z}{z} \right|$$

Összeadás

$n + 1$ darab szám (x_0, \dots, x_n) összeadásánál a k . részletösszeghez (S_k) adjuk a $k + 1$. számot, majd levágással kerekítünk. Ekkor az első részletösszeg:

$$\tilde{S}_1 = \widetilde{x_0 + x_1} = (x_0 + x_1)(1 + \varepsilon_{01}) = S_1 + \varepsilon_{01}S_1, \text{ ahol } |\varepsilon_{01}| \leq \varepsilon_1.$$

Hasonlóan számolva, figyelembe véve, hogy az aktuális hiba mindig kisebb vagy egyenlő, mint a gépi epszilon, azt kapjuk, hogy

$$|\tilde{S}_n - S_n| \leq \varepsilon_1 (n|x_0| + n|x_1| + (n-1)|x_2| + \dots + 2|x_{n-1}| + |x_n|).$$

Így érdemes a legkisebb abszolút értékű taggal kezdeni az összeadást, mert annak a legnagyobb a hibatag-szorzója. A relatív hibára az alábbi becslést kapjuk:

$$\left| \frac{\tilde{S}_n - S_n}{S_n} \right| \leq n\varepsilon_1 \text{ azaz, } n\varepsilon_1 \geq 1 \text{ esetén nem megbízható az eredmény.}$$

Szorzás

Az előbbiekhez hasonlóan a szorzás relatív hibájára a

$$\left| \frac{\tilde{P}_n - P_n}{P_n} \right| \leq n\varepsilon_1.$$

A hiba elfogadható, ha

$$n\varepsilon_1 \leq \frac{1}{a + \frac{1}{2}},$$

ahol a a számábrázolás alapja.

Mátrixok normája

Legyen $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$, ekkor a

$$\|A\|_1 := \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|, \quad \|A\|_\infty := \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

mennyiségeket **egy normának** illetve **végtelen normának** nevezzük. A kiszámítás módja miatt oszlopösszeg illetve sorösszeg normának is szokták nevezni őket.

Legyen A reguláris mátrix, b nem nulla vektor. Tekintsük az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert. Tegyük fel, hogy a b vektor hibás, és az előbbi helyett az $Ax = b + \delta b$ rendszert oldjuk meg, ekkor x helyett $x + \delta x$ megoldást kapjuk, amelynek relatív hibájára belátható a következő becslés:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}.$$

Az $\|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ mennyiséget az A mátrix **kondíciós számának** nevezzük.

Kondíciós szám tulajdonságai

- 1 A kondíciós szám függ a normától.
- 2 A kondíciós szám nagyobb vagy egyenlő, mint egy.
- 3 Ha a kondíciós szám nagyobb vagy egyenlő, mint $\frac{1}{\varepsilon_1}$, akkor a megoldás hibája elfogadhatatlanul nagy lehet. Ekkor a mátrixot **rosszul kondicionált**nak nevezzük.

Ha a mátrix hibás, akkor a megoldás relatív hibájára a

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa}{1 - \kappa}, \quad \text{ahol } \kappa = \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

becslés adódik.

Legkisebb négyzetes közelítés

Lineáris eset

Adott m darab pont a síkon $(t_1, f_1), \dots, (t_m, f_m)$. Keressük azt az egyenes, amely "jól" illeszkedik a megadott pontokra. Itt a jól azt jelenti, hogy az eltérés négyzetesen minimális. Keresendő $F(t) = a + bt$ úgy, hogy a

$$\sum_{i=1}^m (F(t_i) - f_i)^2 = \sum_{i=1}^m (a + bt_i - f_i)^2$$

négyzetes eltérés minimális legyen. Ez a következő lineáris egyenletrendszer megoldásához vezet

$$\begin{bmatrix} m & \sum_{i=1}^m t_i \\ \sum_{i=1}^m t_i & \sum_{i=1}^m t_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m f_i \\ \sum_{i=1}^m t_i f_i \end{bmatrix}$$

A rendszer kibővített mátrixa $(A^T A | A^T f)$ alakba írható, ahol

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ t_1 & \cdots & t_m \end{bmatrix}, \quad f^T = [f_1 \quad \cdots \quad f_m].$$

Általános eset

Legyen adott egy n elemű függvényrendszer $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. Keressük azokat az x_1, \dots, x_n paramétereket melyre a $\sum_{i=1}^m (F(t_i) - f_i)^2$ eltérés minimális, ahol $F(t) = x_1\varphi_1(t) + \dots + x_n\varphi_n(t)$. Részletesen kiírva a következő optimalizálási feladatot kell megoldani:

$$\min_{x_1, \dots, x_n} \left\{ \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n x_j \varphi_j(t_i) - f_i \right)^2 \right\}.$$

A lineáris esethez hasonlóan ez a következő lineáris egyenlet megoldásához vezet:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \varphi_1(t_1) & \cdots & \varphi_1(t_m) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \varphi_n(t_1) & \cdots & \varphi_n(t_m) \end{bmatrix}}_{A^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \varphi_1(t_1) & \cdots & \varphi_n(t_1) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \varphi_1(t_m) & \cdots & \varphi_n(t_m) \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \varphi_1(t_1) & \cdots & \varphi_1(t_m) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \varphi_n(t_1) & \cdots & \varphi_n(t_m) \end{bmatrix}}_{A^T} \underbrace{\begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix}}_f$$

Az előző jelölésekkel adódó

$$A^T A x = A^T f$$

egyenletet **Gauss-féle normál-egyenlet**nek nevezzük.

Megjegyzés

A Gauss-féle normál-egyenletnek mindig van megoldása, amely egyértelmű is, ha A oszlopai lineárisan függetlenek.

Ha lineárisan függők, akkor a modell túl bonyolult, vagy el kell hagynunk A oszlopaiból, vagy növelni kell a sorok számát, hogy a függőséget megszüntessük.

Lagrange-interpoláció

Jelölje P_n a legfeljebb n -edfokú valós polinomok halmazát, azaz $p \in P_n$ pontosan akkor, ha $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és

$$p(x) = a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx^n,$$

ahol $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ adottak.

Alapprobléma

Legyenek $x_0, \dots, x_n, f_0, \dots, f_n$ adott valós számok úgy, hogy $x_i \neq x_j$, ha $i \neq j$. Keressük azt a $p \in P_n$ polinomot, amelyre

$$p(x_i) = f_i, \quad i = 0, \dots, n$$

teljesül.

Lagrange-interpoláció

Az

$$\ell_j(x) := \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

polinomot j . **Lagrange-féle alappolinom**nak nevezzük.

A Lagrange-féle interpolációs probléma megoldása

A fenti jelölések mellett a

$$\mathcal{L}_n(x) := \sum_{j=0}^n f_j \ell_j(x)$$

polinom teljesíti az alapproblémában kirótt feltételeket.

Tétel

Az előbbi feltételek mellett \mathcal{L}_n egyértelmű.

Newton-féle rekurzió

Az előbbi jelölések mellett legyen \mathcal{N}_k az a k -adfokú $0 < k \leq n$ polinom, amely interpolálja az $\{x_i, f_i\}_{i=0}^k$ adatokat. Ekkor $\mathcal{L}_k = \mathcal{N}_k$. Legyen

$$\mathcal{N}_0(x) = \mathcal{N}_0(x_0) := b_0 = f_0.$$

Keressük ezután $\mathcal{N}_1(x) = \mathcal{N}_0(x) + b_1(x - x_0)$ -t.

$$\mathcal{N}_1(x) = f_0 + \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}(x - x_0).$$

A k . lépésben

$$\mathcal{N}_k(x) = \mathcal{N}_{k-1}(x) + b_k \omega_k(x), \quad k = 1, \dots, n$$

alakban keressük a polinomot, ahol

$$\omega_0(x) \equiv 1, \quad \omega_k = \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j), \quad k = 1, \dots, n.$$

Newton-féle rekurzió

Így az a keresett polinom

$$\mathcal{N}_n(x) = \sum_{i=0}^n b_i \omega_i(x).$$

A Newton-féle rekurzió együtthatóinak kiszámítása

$$\mathcal{N}_k(x) = \mathcal{L}_k(x) = \sum_{i=0}^k f_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^k \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = x^k \sum_{i=0}^k f_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^k \frac{1}{x_i - x_j} + Q(x),$$

ahol $Q(x)$ foka szigorúan kisebb, mint k , így

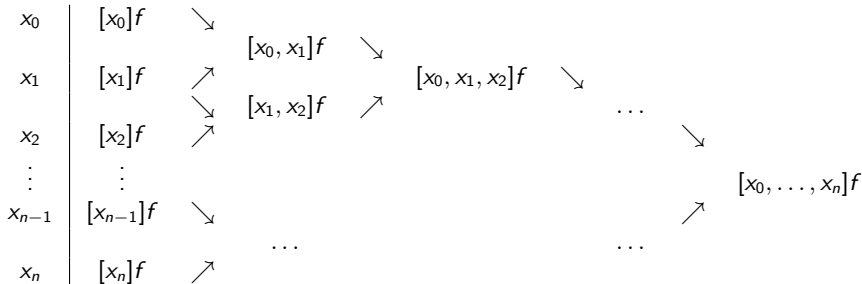
$$b_k = \sum_{i=0}^k f_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^k \frac{1}{x_i - x_j} =: [x_0, \dots, x_k] f.$$

Interpoláció

A $[x_0, \dots, x_k]f$ kifejezést az f függvény x_0, \dots, x_k pontokra támaszkodó **k -ad rendű osztott differenciájának** nevezzük. Könnyen látható, hogy $0 \leq m < k \leq n$ esetén

$$[x_m, \dots, x_k]f = \frac{[x_{m+1}, \dots, x_k]f - [x_m, \dots, x_{k-1}]f}{x_k - x_m}.$$

A fenti képletet felhasználva



Tétel

Tegyük fel, hogy f $n + 1$ -szer folytonosan differenciálható az $[a, b]$, $a := x_0$, $b := x_n$ intervallumon. Ekkor tetszőleges $x \in [a, b]$ esetén létezik olyan $\xi(x) \in [a, b]$, hogy

$$f(x) - \mathcal{L}_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \omega_n(x),$$

Következmény

Az előző feltételek mellett, ha még $\max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)| \leq M_{n+1}$ is teljesül, akkor

$$|f(x) - \mathcal{L}_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_n(x)|, \quad x \in [a, b].$$

Interpoláció, Hermite-féle interpoláció

Keressük azt a \mathcal{H} polinomot, amelyre

$$\mathcal{H}^{(j)}(x_i) = f_{ij}, \quad i = 0, \dots, n, \quad j = 0, \dots, m_i - 1,$$

ahol x_i -k és f_{ij} -k adott valós számok, m_i -k adott természetes számok, és $\mathcal{H}^{(j)}$ jelöli \mathcal{H} j . deriváltját.

Tétel

Legyen $m := \sum_{i=0}^n m_i$, ekkor a Hermite-féle interpolációs feladatnak a korábbi feltételek mellett egyértelműen létezik megoldása P_{m-1} -ben.

A Hermite-féle interpolációs polinom együtthatóinak kiszámítása differencia sémával

A differenciasémában minden alappontot m_i -szer szerepeltetünk, és f_{i1} -et írunk oda, ahol $0/0$ alakú kifejezés adódna, majd $\frac{1}{2}f_{i2}$ -t a másodrendű differenciáknál a $0/0$ alakú kifejezések helyére, stb.

Alapprobléma

A korábbi modellekben a közelítő polinom a végpontokban hektikusan viselkedhet, ezért érdemes minden szakaszon külön-külön interpolálni. Ekkor ügyelni kell arra, hogy a modellek csatlakozzanak az osztópontokban.

Szakaszonként lineáris approximáció

Ekkor az adatokat egy törött vonallal kötjük össze. Ekkor az i . intervallumon a szakaszonként lineáris függvény alakja:

$$\varphi_i(x) = f_i + \frac{(f_{i+1} - f_i)}{(x_{i+1} - x_i)}(x - x_i), \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 1, \dots, n.$$

Magasabb rendű interpoláció érdekében ismernünk kell az adott pontban valamilyen rendig a deriváltakat is. Másik lehetőség, ha az egész intervallumon egyszerre készítjük el az interpolációt egy előre megadott rendben.

Numerikus integrálás, Egy intervallumra támaszkodó kvadratúraképletek

Legyen adott egy $[x_0, x_1]$ nem elfajuló intervallum és ezen egy Riemann integrálható függvény $f: [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$.

Középpont szabály (érintő szabály)

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \approx (x_1 - x_0) f\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) = h_1 f(m_1).$$

Trapéz-formula

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \approx \frac{(x_1 - x_0)}{2} (f(x_0) + f(x_1)) = \frac{h_1}{2} (f(x_0) + f(x_1)).$$

Simpson-formula

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \approx \frac{(x_1 - x_0)}{6} \left(f(x_0) + 4f\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) + f(x_1) \right) = \frac{h_1}{6} (f(x_0) + 4f(m_1) + f(x_1)).$$

Kvadratúra képlet általában

Legyen adott egy $[a, b]$ nem elfajuló intervallum és ezen egy Riemann integrálható függvény $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, ekkor az integrál közelítésére szolgáló általános kvadratúra képlet a következő:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n a_i f(x_i),$$

ahol a_i -k adott súlyok.

Ilyen kvadratúra képletet kaphatunk például, ha a Lagrange polinomot integráljuk, és ezt használjuk közelítésként. Két alappont esetén a Trapéz-formulát kapjuk. Általában:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b \mathcal{L}_n(x) dx = \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b \ell_i(x) dx.$$

Ekvidisztáns alappontok esetén az így kapott kvadratúra képleteket **Newton-Cotes formuláknak** nevezzük.

A Newton-Cotes képletek hibája

$$\left| \int_a^b (f(x) - \mathcal{L}_n(x)) dx \right| = \left| \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \omega_n(x) dx \right| \leq$$
$$\frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \int_a^b |\omega_n(x)| dx \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}.$$

Nemlineáris egyenletek, Felező módszer

Tegyük fel, hogy az $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvényre $f(a)f(b) < 0$, azaz az intervallum végpontjaiban a függvényértékek különböző előjelűek. Ekkor a Bolzano-tétel miatt (minden folytonos függvény Darboux-tulajdonságú) létezik olyan $\bar{x} \in]a, b[$, hogy

$$f(\bar{x}) = 0.$$

Elméleti algoritmus

Kezdőértékek: $x_0 := a$, $y_0 := b$, $m_0 := \frac{x_0 + y_0}{2}$, $k := 0$.

- Ha $f(m_k) = 0$, akkor vége, egyébként a második lépés.
- Ha $f(x_k)f(m_k) < 0$, akkor $x_{k+1} := x_k$ és $y_{k+1} := m_k$, egyébként $x_{k+1} := m_k$ és $y_{k+1} := y_k$, $k := k + 1$. Első lépés.

A gyakorlatban a végtelen iterációs szám elkerülése végett meg lehet adni a végrehajtandó iterációk maximális számát, valamint érdemes $f(x) = 0$ helyett $|x_k - y_k| \leq \varepsilon$ feltételt alkalmazni. Ez utóbbi esetben a megengedett hibát (ε -t) is definiálni kell a ciklus végrehajtása előtt, és a leállási feltételt "Ha $|x_k - y_k| \leq \varepsilon$, akkor vége"-re kell cserélni.

Nemlineáris egyenletek, Banach-féle iteráció

Legyen $T: [a, b] \rightarrow [a, b]$ olyan, hogy

$$|T(x) - T(y)| \leq q|x - y|, \quad x, y \in [a, b]$$

valamely $0 < q < 1$ konstanssal. Ekkor azt mondjuk, hogy T **q -kontrakció**.

Állítás (Banach)

Az előbbi feltételek mellett létezik pontosan egy olyan $\bar{x} \in [a, b]$, hogy

$$T(\bar{x}) = \bar{x}.$$

Továbbá, tetszőleges $x \in [a, b]$ esetén az $x_0 = x$, $x_{k+1} = T(x_k)$ iteráció konvergens, és

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \bar{x}.$$

Az fenti tulajdonságú \bar{x} pontot T **fixpontjának** nevezzük. Ekkor az $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény zérushelye helyett a $T(x) = x - \omega f(x)$ függvény fixpontját is kereshetjük, amennyiben létezik olyan ω paraméter, amelyre az előbb definiált T kontrakció lesz.

Newton iteráció

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

- A felező módszer és a Banach iteráció globálisan konvergensek.
- A felező módszer és a Banach iteráció nem sima függvények esetén is alkalmazható.
- A felező módszer és a Banach iteráció konvergenciája lassúbb, mint a Newton iterációé.
- A Newton iteráció konvergenciájához általában egy olyan x_0 -ra van szükség, amely "elég közel" van a gyökhöz.
- Ha a Newton iteráció konvergens, akkor a konvergencia gyorsabb, mint a Banach iteráció esetében, a helyes számjegyek minden lépésben duplázódhatnak.
- Az Newton iteráció felírásához szükséges a függvény differenciálhatósága, a konvergencia biztosításához pedig kétszeres folytonos differenciálhatósága.

Feladatok

- Közelítsük a $\sqrt{2}$ értékét mindhárom módszerrel!
- Közelítsük az $e^x = 3x$ egyenlet gyökét mindhárom módszerrel a $[0, 1]$ intervallumon!

Stacionárius pont keresése

Ha egy differenciálható függvénynek az \bar{x} pontban lokális(globális) szélsőértéke van, akkor a derivált ebben a pontban eltűnik. Így az előbbi módszerek segítségével optimalizálási feladatok numerikus megoldására szolgáló algoritmusokat kaphatunk.

Feladat

Keressük meg az $f(x) = (x - 1)^2(x + 1)^2$ függvény stacionárius pontjait.